

Tiges capillaires

S. Mora^a, L. Pismen^b, Y. Pomeau^c

a. *Laboratoire Charles Coulomb, Département des Colloïdes, Verres et Nanomatériaux, UMR 5521, CNRS et Université de Montpellier 2*

b. *Department of Chemical Engineering, Technion – Israel Institute of Technology, Haifa 32000, Israel.*

c. *University of Arizona, Department of Mathematics, Tucson, USA.*

Résumé :

Nous montrons qu'un filament élastique peut être instable vis-à-vis de l'instabilité de Plateau : une modulation longitudinale du rayon diminue la surface d'un cylindre, conduisant à une déstabilisation capillaire. Les forces élastiques s'y opposent. De cette compétition naît un seuil d'instabilité que nous avons observé expérimentalement. La valeur de ce seuil est en accord avec la théorie que nous avons développée.

Abstract :

We report the observation of a Plateau instability in a thin filament of solid gel with a very small elastic modulus. A longitudinal undulation of the surface of the cylinder reduces its area thereby triggering capillary instability, but is counterbalanced by elastic forces following the deformation. This competition leads to a nontrivial instability threshold for a solid cylinder. The onset of linear instability is when the radius of the cylinder is one-sixth of this length scale, in agreement with theory presented here.

Mots clefs : Tension de surface ; élasticité ; instabilités

1 Introduction

La forme que prend un volume donné de liquide résulte, au moins en partie, de sa tendance à réduire la surface afin de diminuer l'énergie capillaire. Le cylindre n'est pas la forme de surface minimale, le minimum absolu étant pour la sphère. Ce n'est pas non plus un minimum local puisqu'une modulation longitudinale du rayon conduit à une diminution de la surface. L'instabilité de Rayleigh-Plateau, qui se traduit pas la déstabilisation d'un cylindre liquide, en est une conséquence directe [1, 2, 3, 4]. La tension de surface existe aussi pour un solide, mais ses effets sont alors la plupart du temps inobservables. La dimension du rapport $l_c = \gamma/\mu$, où μ est le module élastique de cisaillement et γ est la tension de surface, est une longueur. Cette longueur, appelée ici *longueur elasto-capillaire*, définit la limite entre deux régimes : sur des échelles de longueur plus grandes que l_c , l'énergie élastique domine l'énergie capillaire. Le contraire se produit sur des échelles de longueurs inférieures à l_c . Cette longueur est microscopique pour la plupart des solides car tension de surface et module de cisaillement proviennent d'interactions microscopiques, et donc leur rapport est de l'ordre de grandeur de la portée de ces interactions, i.e., une fraction de nanomètres. l_c n'est donc pas une grandeur pertinente pour la mécanique des milieux continus : les effets capillaires sont alors absents. Cependant, pour des solides élastiques très mous, comme certains élastomères, ou certains gels, l_c est macroscopique. En effet, pour des systèmes complexes composés de grandes molécules, tension de surface et module de cisaillement sont régis par des interactions différentes. Le module de cisaillement dépend essentiellement des interactions entre ces molécules, interactions qui se font sur de grandes distances (par exemple, la distance qui sépare deux points de réticulation), alors que la tension de surface est pilotée par la densité de monomères dans le cas d'un élastomère, et par le solvant dans le cas d'un gel. La tension de surface

est, pour tous ces systèmes, de l'ordre de quelques dizaines de mN/m. Pour un gel, le module de cisaillement peut descendre jusqu'à quelques dizaines de Pa. La longueur élasto-capillaire est alors de l'ordre du millimètre, ce qui est bien au dessus des tailles microscopiques !

Le mécanisme déstabilisant de l'instabilité de Rayleigh-Plateau pourrait donc se manifester pour un cylindre élastique constitué d'un tel matériau. Dans ce cas, au gain d'énergie généré par une modulation longitudinale du rayon s'ajoute un coup en énergie élastique, d'où une compétition entre effets élastiques et capillaires. La seule échelle de longueur géométrique du cylindre (infiniment long) est le rayon (ρ_0). L'autre échelle de longueur est la longueur élasto-capillaire l_c . D'après la discussion qui précède, les effets élastiques (stabilisants) domineront lorsque $\rho_0 \gg l_c$, alors que les effets déstabilisants seront importants lorsque $\rho_0 \ll l_c$. On peut donc s'attendre à ce que l'introduction de l'élasticité enrichisse la physique de l'instabilité de Plateau, en particulier par l'existence d'un seuil.

2 Approche théorique

Supposons qu'un cylindre élastique (incompressible, de module de cisaillement μ et de rayon ρ_0) soit transféré d'un environnement à un autre de telle sorte que la tension de surface passe de 0 à γ . Le cylindre se déforme alors. Considérons une perturbation axi-symétrique du rayon de la forme $r(z) = \rho_0 + \varepsilon a \cos(kz) - \frac{a^2}{4\rho_0} \varepsilon^2$. $\varepsilon \times a$ est l'amplitude de la perturbation ($\varepsilon \ll 1$) et k est le nombre d'onde. Le terme quadratique en ε est nécessaire pour satisfaire à la condition d'incompressibilité à l'ordre ε^2 .

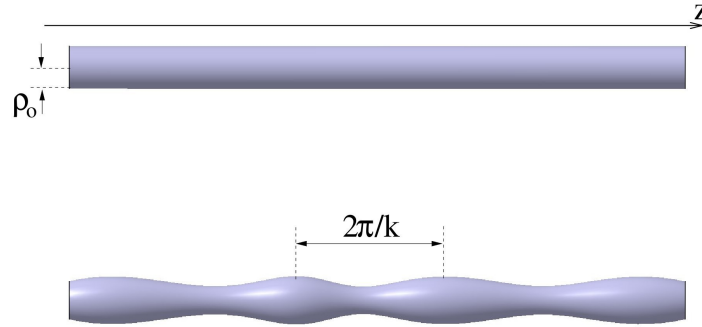


FIGURE 1 – Schéma d'un cylindre à base circulaire avant et après avoir subi une déformation longitudinal de son rayon.

L'aire de la surface du cylindre perturbé est, rapportée à l'unité de longueur :

$$S = \frac{2\pi}{z} \int_0^z r \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2} dz = \pi \left\{ 2\rho_0 + \left(\frac{\varepsilon^2 a^2}{2\rho_0} \right) (k^2 \rho_0^2 - 1) \right\}. \quad (1)$$

On constate que pour $\rho_0 k < 1$, cette surface est inférieure à celle du cylindre droit : un cylindre liquide est donc toujours instable, ce qui correspond à l'instabilité de Rayleigh-Plateau [1, 2, 3, 4].

Pour un cylindre solide, l'énergie présente une contribution volumique. On l'obtient en calculant l'énergie élastique associée à la perturbation du cylindre droit (par unité de longueur) :

$$\mathcal{E}_{el} \sim \frac{1}{\text{Longueur}} \int d^3\mathbf{r} \frac{1}{2} \mu \times (\text{déformation})^2 = \alpha \pi \rho_0^2 \times \frac{\mu}{2} \left(\frac{\varepsilon a}{\rho_0} \right)^2, \quad (2)$$

où α est un facteur numérique proche de l'unité traduisant le fait que la déformation n'est pas radialement invariante. La variation d'énergie totale est la somme des variations d'énergies de surface et de volume :

$$\mathcal{E} \simeq \frac{\pi(\varepsilon a)^2 \mu}{2} \left[\alpha + \frac{\gamma}{\mu \rho_0} (k^2 \rho_0^2 - 1) \right]. \quad (3)$$

La forme cylindrique est stable si n'importe quelle perturbation entraîne une augmentation de l'énergie totale. Dans le cas contraire, le cylindre se déforme spontanément vers la configuration d'énergie plus basse. D'après Eq. 2, la variation totale d'énergie (\mathcal{E}) peut prendre des valeurs négatives seulement si :

$$-\frac{\gamma}{\mu\rho_0} + \alpha \leq 0.$$

La compétition entre élasticité et capillarité conduit donc à un seuil non trivial dans le cas d'un cylindre solide, ce qui marque une différence importante par rapport au cas liquide. Le calcul complet tenant compte de la dépendance radiale de la déformation conduit à $\alpha = 6$ [5, 6] : le seuil de stabilité correspond donc à :

$$\gamma = 6\mu\rho_0. \quad (4)$$

Un cylindre dont le diamètre est inférieur au tiers de la longueur élasto-capillaire est instable. Sinon, il est stable. Comme attendu, le rayon critique est d'autant plus grand que le module de cisaillement est faible (i.e., le matériau est mou).

3 Expériences

Nous avons réalisé des cylindres de gel d'agar de différents rayons et différentes concentrations (entre 0,16% et 0,5% en masse) pour faire varier les modules élastiques. Les cylindres d'agar sont obtenus en injectant une solution liquide d'agar (à 90 degrés) dans un moule réalisé en polystyrène. Un cadre rigide joint les deux extrémités par l'intermédiaire d'un excès de solution d'agar. L'ensemble est laissé à température ambiante durant cinq heures. Le moule est alors dissout par immersion dans du toluène. On obtient un filament de gel d'agar immergé dans du toluène. La longueur du filament est d'environ 2 cm, son rayon dépend de la taille du moule, entre 150 et 260 microns.

Une instabilité de surface apparaît à la fin de la dissolution pour certaines valeurs du rayon du cylindre et du module de cisaillement du gel. Les filaments de grandes concentrations d'agar et/ou grands diamètres restent cylindriques. Pour les plus faibles concentrations et les plus petits diamètres, les filaments se cassent en plusieurs morceaux au cours de la dissolution. Pour des rayons et des concentrations intermédiaires, la surface présente des ondulations statiques et permanentes (Fig. 2,(b),(c),(d)). La figure 3 fait le bilan pour les différents cylindres testés. Le plan (μ, ρ_0) est divisé en deux zones, l'une correspond aux cylindres stables, l'autre aux cylindres instables. Notons que dans ces expériences, la tension de surface reste constante. L'eau étant le solvant des gels, cette tension de surface est identique à la tension de surface entre l'eau et le toluène ($\gamma = 36,5$ mN/m).

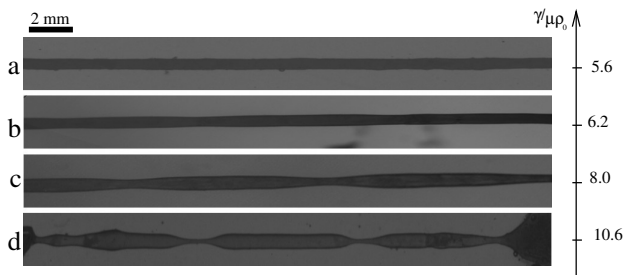


FIGURE 2 – Forme d'équilibre des cylindres d'agar immergés dans du toluène pour différentes valeurs du module de cisaillement (entre 12 et 27 Pa). Le rayon vaut $\rho_0 = 240\mu\text{m}$. L'instabilité de surface est observée lorsque $\gamma/(\mu\rho_0) > 6,2$.

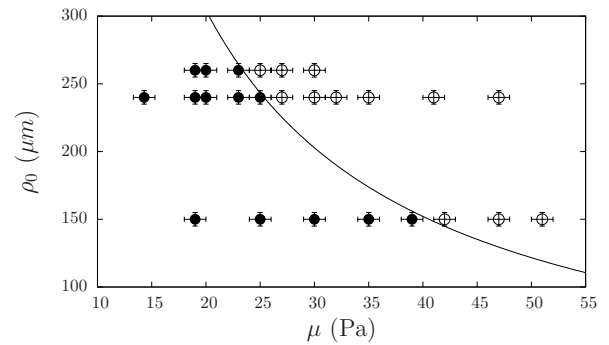


FIGURE 3 – Les symboles vides correspondent à des cylindres stables ; les symboles pleins à des cylindres instables. La courbe tracée, d'équation $\rho_0 = \frac{1}{6} \frac{\gamma}{\mu}$, correspond à la prédiction théorique (4). Nous avons pris pour γ la valeur tabulée de la tension de surface eau-toluène.

Nous avons tracé sur la même figure la prédiction théorique du seuil d'instabilité (4) sans paramètre ajustable. Le bon accord observé est un argument fort pour affirmer que la capillarité est à l'origine

de l'instabilité observée, et que le seuil d'instabilité provient d'une compétition entre élasticité et capillarité [6].

Tanaka et Matsuo [7] ont eux aussi observé une instabilité se manifestant par une modulation longitudinale du rayon d'un cylindre constitué d'un gel. Dans leurs expériences, le liquide situé à l'extérieur du cylindre est le solvant du gel. La composition de ce liquide est ensuite modifiée pour qu'une partie du solvant quitte le gel. Lors de ce processus, le cylindre n'est plus homogène puisque le solvant quitte le gel par la surface. La zone périphérique est moins gonflée que la partie centrale : le module de cisaillement est plus élevé au voisinage de la surface du cylindre qu'au centre. Par ailleurs, en raison de la miscibilité entre le liquide extérieur et le solvant, la tension de surface est dans ce cas microscopique [8]. Il s'agit donc d'une instabilité de nature physique différente de celle que nous avons observée dans cette étude.

4 Conclusions et perspectives

Nous avons montré ce que devient l'instabilité de Plateau lorsque le liquide est remplacé par un élastique mou. Le bon accord entre expériences et théorie nous a permis de prouver que les effets capillaires déstabilisent un cylindre élastique à partir du moment où le diamètre du cylindre est inférieur au rapport entre la tension de surface et le module d'Young du matériau constituant le cylindre. D'un point de vue plus fondamental, ce travail prouve que la tension de surface peut avoir un effet sur la forme d'équilibre d'un solide élastique.

La longueur d'onde finie observée et la forme des ondulations des cylindres, sinusoïdale près du seuil et nettement plus compliquée loin du seuil avec des zones de rayons constants séparées par de fines constriction (Fig. 2), montrent l'intérêt de développer une analyse non-linéaire.

Cette instabilité pourrait intervenir dans des processus biologiques, par exemple lors de la formation de filaments, ou lors de la formation de structures en forme de chapelet dans des fibres nerveuses myélinisées [9]. Elle pourrait aussi servir de base pour un procédé de fabrication de fibres à rayon variable de période contrôlée. Avec des périodes de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde optiques, ces cylindres pourraient servir de fibres optiques ayant des bandes de longueurs d'onde interdites.

Références

- [1] J. Plateau. *Statique Expérimentale et théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires*, volume II. Gauthier Villars, Paris, 1873.
- [2] J.W.S. Lord Rayleigh. On the instability of jets. *Proc. London. Math. Soc.*, 10 :4–13, 1878.
- [3] J.W.S. Lord Rayleigh. On the capillary phenomena of jets. *Proc. R. Soc. London*, 29 :71–97, 1879.
- [4] J Eggers. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Reviews of Modern Physics*, 69(3) :865–929, 1997.
- [5] B. Barrière, K. Sekimoto, and L. Leibler. Peristaltic instability of cylindrical gels. *J. Chem. Phys.*, 105(4) :1735–1738, 1996.
- [6] S. Mora, T. Phou, J.M. Fromental, L.M. Pismen, and Y. Pomeau. Capillarity driven instability of a soft solid. *Phys. Rev. Lett.*, page 214301, 2010.
- [7] E.S. Matsuo and T. Tanaka. Patterns in shrinking gels. *Nature*, 358 :482–485, 1992.
- [8] J.G. Kirkwood and F.P. Buff. *J. Chem. Phys.*, 17 :338, 1949.
- [9] S. Ochs, RA. Jersild, R. Pourmand, and CG. Potter. The beaded form of myelinated nerve-fibers. *Neuroscience*, 61 :361–372, 1994.